# Билет 24. Рекуррентные алгоритмы динамического оценивания состояния системы

Обзор есть в начале/конце статьи в папке билета

Из моей магистерской (за исключением UKF)

Наиболее распространенным алгоритмом такого типа является линейный фильтр Калмана (ЛФК) [17], который оптимален [13, 17] по критерию минимума среднеквадратичного отклонения (СКО) ошибок оценивания, однако применим только в случае линейной зависимости сигнала от параметров.

Интерферометрические системы характеризуются нелинейной зависимостью регистрируемых сигналов от их параметров и не могут быть описаны с использованием только линейных операторов. Существующие алгоритмы оценивания параметров нелинейных динамических систем [13, 16] не являются оптимальными [13]. Представляет интерес исследование эффективности таких алгоритмов применительно к задаче динамической обработки интерферометрических сигналов.

Наиболее известным обобщением ЛФК на случай оценивания параметров нелинейных динамических систем является расширенный фильтр Калмана (РФК) [13, 18–21]. В нем используется линеаризация нелинейных уравнений динамической системы при помощи математического аппарата рядов Тейлора с использованием членов, содержащих производные первого порядка.

Существуют модификации РФК, использующие аппроксимацию нелинейных уравнений динамической системы при помощи членов ряда Тейлора, содержащих производные более высоких порядков. В некоторых случаях это позволяет уменьшить ошибки оценивания параметров, однако повышает время работы вследствие необходимости дополнительных расчетов. К таким алгоритмам относятся расширенный фильтр Калмана второго порядка (РФКВП) [13] и оптимальный нелинейный марковский фильтр (ОНМФ) [22–26]. Представляет интерес сравнение качества обработки интерферометрических сигналов при помощи РФК, РФКВП и ОНМФ.

Альтернативным подходом к динамическому оцениванию параметров нелинейных динамических систем является последовательный метод Монте-Карло (ПММК) [13, 27–28], упоминаемый в зарубежной литературе как «фильтр частиц» (англ. Particle filter) [29], конденсационный алгоритм (англ. The condensation algorithm) [30–31] и аппроксимация взаимодействующими частицами (англ. Interacting particle approximation) [32]. Этот алгоритм базируется на статистической аппроксимации апостериорной плотности вероятности параметров системы на основании ряда предыдущих наблюдений. Данный подход является перспективным направлением в области динамического оценивания параметров интерферометрических сигналов, благодаря широким возможностям по адаптации алгоритма к конкретным видам систем.

Существует так же подход на основе сигма-точек (Unscented Kalman Filter)

## 2.1 Расширенный фильтр Калмана

Наиболее распространенным алгоритмом динамического оценивания параметров нелинейных динамических систем является РФК [13, 18]. Этот алгоритм основан на линеаризации нелинейных уравнений, описывающих динамическую систему, при помощи рядов Тейлора.

Обработка *k*-ого отсчета сигнала при помощи РФК разделяется на два этапа, которые принято [13] называть предсказанием и коррекцией.

На этапе предсказания происходит экстраполяция значений вектора параметров с учетом нелинейной функции **f**(**θ**), которая определяется (1.3.1)–(1.3.2) в соответствии с моделью как

, (2.1.1)

и предсказание ковариационной матрицы ошибок

, (2.1.2)

где  – ковариационная матрица ошибок оценивания параметров на предыдущем шаге,  – ковариационная матрица шума системы, а матрица  является первой производной функции **f**(**θ**) по вектору параметров в точке **θ**(*k* – 1)

. (2.1.3)

На этапе коррекции происходит уточнение предсказанного значения  с учетом невязки между наблюдениями на текущем шаге и предсказанием при помощи уравнения

, (2.1.4)

где **s**(*k*) – вектор наблюдения,  – коэффициент усиления фильтра, определяющий вклад невязки наблюдения и предсказания в оценку вектора параметров. Коэффициент усиления вычисляется как

, (2.1.5)

где  – ковариационная матрица шума наблюдения, а  – первая производная функции  по вектору параметров в точке 

. (2.1.6)

Ковариационная матрица ошибок корректируется при помощи выражения

, (2.1.7)

где **I** – единичная матрица.

Оценки параметров для каждого поступающего наблюдения **s**(*k*) получают, последовательно применяя соотношения (2.1.1)–(2.1.7).

## 2.2 Расширенный фильтр Калмана второго порядка и оптимальный нелинейный марковский фильтр

Для повышения точности динамического оценивания параметров иногда целесообразно использовать РФКВП [13, 40], в котором при аппроксимации нелинейных функций в уравнениях (1.3.1)–(1.3.2) дополнительно учитывается член ряда Тейлора, содержащий производные второго порядка этих функций по параметрам. С учетом этого уравнение (2.1.1) представляется в форме

, (2.2.1)

где  имеет смысл *i*-ого уравнения в векторной функции системы, *d* – количество оцениваемых параметров,  – оператор вычисления следа матрицы. Вектор  представляется как вектор-столбец размера *P,* значения всех элементов которого кроме *i*-ого равны нулю, а *i*-ый элемент равен единице.

В уравнении коррекции в этом случае появляется дополнительная поправка, учитывающая вклад дополнительного члена ряда Тейлора в результирующую оценку:

, (2.2.2)

где  представляется в форме:

. (2.2.3)

Коэффициент усиления фильтра рассчитывается так же, как в РФК первого порядка, при помощи уравнения (2.1.5).

В уравнении (2.2.3) представляют собой матрицы, учитывающие вторые производные *i*-ого компонента векторного уравнения наблюдения в точке :

. (2.2.4)

В основе ОНМФ [22–26] лежит марковская теория нелинейной фильтрации. В этом методе аналогично РФКВП используется аппроксимация нелинейных уравнений системы и наблюдения при помощи рядов Тейлора с учетом членов, содержащих производные второго порядка. В отличие от РФКВП в ОНМФ уравнение расчета коэффициента усиления модифицируется следующим образом

, (2.2.5)

где **С**(*k*)– поправка, элементы которой могут быть рассчитаны как

, (2.2.6)

где  – вторая производная *i*-ого уравнения в векторной функции наблюдения по *m*-ому и *n*-ому параметрам в векторе параметров, а  соответствует члену матрицы , располагающемуся в *m*-ой строке и   
*n*-ом столбце.

Уравнение коррекции в ОНМФ записывается в виде, аналогичном РФКВП (2.2.2). Сравнение РФК, РФКВП и ОНМФ применительно к обработке интерферометрических сигналов кратко рассмотрено в работе [41].

При малой априорной неопределенности относительно модели и характеристик случайных помех использование при аппроксимации нелинейных уравнений, описывающих динамическую систему, при помощи дополнительных членов ряда Тейлора обеспечивает повышения качества динамического оценивания параметров [13].

## 2.3 Последовательный метод Монте-Карло

Альтернативным подходом к динамическому оцениванию параметров нелинейных динамических систем является ПММК, являющийся численной реализацией метода байесовского оценивания [42]. ПММК основан на статистической аппроксимации функции плотности вероятности распределения параметров.

Существуют реализации ПММК, использующие различные подходы к численному моделированию распределения оцениваемых параметров [43]. Ниже рассмотрена простейшая версия ПММК, позволяющая продемонстрировать основные принципы работы алгоритма.

Работа ПММК состоит из четырех этапов (рис. 2.1):

– генерация случайного набора векторов параметров системы в соответствии с плотностью вероятности распределения параметров на предыдущем шаге *p*(**θ**(*k*–1));

– предсказание возможных значений параметров на следующем шаге;

– отбор векторов, лучше всего удовлетворяющих поступившим наблюдениям;

– коррекция плотности вероятности распределения параметров.

**s**(*k*)

*p*(**θ**(*k*))

*N*

Генерация случайного набора векторов параметров динамической системы

Предсказание значений параметров для каждого вектора на следующем шаге

Коррекция плотности вероятности распределения параметров

Отбор векторов, лучше всего удовлетворяющих поступившим наблюдениям

*p*(**θ**(*k*–1))

Рис. 2.1. Схема обработки одного отсчета сигнала при помощи последовательного метода Монте-Карло

Количество генерируемых случайных векторов *N*, пороговая вероятность отбора и статистические моменты априорной плотности вероятности распределения параметров являются входными параметрами алгоритма и задаются пользователем априорно в зависимости от требований к скорости и качеству обработки данных.

На первом этапе с учетом информации о распределении шумов и компонентов вектора параметров динамической системы генерируется множество , состоящее из *N* независимых векторов , где *i* = 0..*N*–1 – номер вектора  в множестве .

На втором этапе в соответствии с функцией **f**(.) формируется множество предсказываемых значений вектора параметров:

. (2.3.1)

На третьем этапе из элементов множества  выбираются векторы, лучше всего удовлетворяющие наблюдениям, полученным на текущем шаге. Этот выбор осуществляется на основе оценки вероятности совпадения каждого из векторов множества  с истинным вектором параметров на текущем шаге. Для этого с использованием уравнения **h**(.) для каждого из векторов множества  вычисляется оценка наблюдения . Условную вероятность можно оценить как

. (2.3.2)

Формула для вычисления *q*(*i*) зависит от характера функции распределения шума наблюдения. Например, если шум наблюдения **n**(*k*) аддитивен и распределен по нормальному закону с нулевым средним, уравнение (2.3.2) можно представить в виде [18]:

, (2.3.3)

где *m* – количество элементов в векторе наблюдения **s**(*k*), **R** – ковариационная матрица шума наблюдения,  – коэффициент нормировки. Выбор наиболее вероятных векторов осуществляется в соответствии с правилом

, (2.3.4)

где *p* – пороговое значение вероятности, определяющее минимальную условную вероятность совпадения вектора из множества  с истинным вектором параметров динамической системы.

На четвертом этапе вычисляется оценка вектора параметров (как среднее арифметическое выбранных векторов) и осуществляется коррекция плотности вероятности распределения параметров. Новое множество , которое используется для оценки параметров на следующем шаге, генерируется в соответствии со скорректированной плотностью вероятности распределения компонентов вектора параметров.

Отбор *M* наиболее вероятных векторов (*M* < *N*) можно осуществлять также в соответствии с критерием минимизации невязки между наблюдением и его оценкой

. (2.3.5)

Использование выражения (2.3.5), однако, не позволяет вычислить вероятность *q*(*i*), необходимую для выбора векторов параметров по правилу (2.3.4). Оценка вектора параметров на каждом шаге в этом случае вычисляется как среднее значение выбранных в соответствии с правилом (2.3.4) элементов множества .

При использовании распределений, отличных от нормального, в качестве оценки вектора параметров выступает наиболее вероятное значение вектора параметров, полученное в результате анализа распределения отобранных векторов.